Algebra & Trignometry.

MM-100

नोट: सभी प्रश्न अनिवार्य है एवं समान अंक हैं

All questions are compulsory & carry equal Mark

Q.1. (a) दर्शाइये कि आव्यूह के भिन्न भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं

Show that the eigen vectors corresponding to distinct eigen values of a matrix are linearly independent.

(b) यदि $R_1 = [3, 1\ -4]$, $R_2 = [2\ 2\ -3]$, $R_3 = [0\ -4\ 1]$ हो सभी आव्यूह रैखिकतः परतंत्र है दर्शाइये।

Show that if $R_1 = [3\ 1\ -4]$, $R_2 = [2\ 2$ … $R_3 = [0\ -4\ 1]$. Then all matrix are linearly dependent.

or

(a) निम्न आव्यूह के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए। Find Eigen values & eigen vectors of the following matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) दर्शाइये कि R^3 का उपसमुच्चय $\{(3,4,-1), (1,2,0), (1,0,-1)\}$ रैखिकतः परतंत्र है

Show that the subset $\{(3,4,-1), (1,2,0), (1,0,-1)$ of R^3 are linearly dependent.

Q. 2. (a) यदि समीकरण $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ के मूल की बहुकता 2 हो तो दर्शाइये कि वह मूल $\frac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$ है।

If a root of the equation $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ is multiplicity 2, then prove that it is $\frac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$.

(b) मैट्रिक्स विधि से हल कीजिए। Solve by Matrix method. $2x_1+3x_2+x_3=9$, $x_1+2x_2+3x_3=6$, $3x_1+x_2+2x_3=8$

or

(a) कार्डन विधि से हल कीजिए। Solve by Cardan's method $x^3+6x^2-12x+32=0$

(b) मैट्रिक्स विधि से दर्शाइये कि निम्न समीकरण असंगत है। Show that the following equations are inconsistent using matrix method. $x+y+z=-3$, $3x+y-2z=-2$, $2x+4y+7z=7$

Q. 3 (a) संबंध R निम्न प्रकार से परिभाषित है $xRy \Leftrightarrow x-y$, 5 से विभाजित है जहां $x,y \in I$ दर्शाइये कि R तुल्यता संबंध है। Relation R is defined as $xRy \Leftrightarrow x-y$, is divisible by 5. where $x,y \in I$ Show that R is an equivalence relation.

(b) दर्शाइये कि इकाई के घनमूलों का समुच्चय गुणन के सापेक्ष आबेली समूह बनाता है।
Show that the set of cube roots of unity is a finite abelian group with respect to multiplication.

or

(a) यदि $a*b=\frac{ab}{2}$ जहां $a,b \in Q_+$, दर्शाइये कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q_+, $*$ के सापेक्ष आबेली समूह बनाता है।

show that the set of all positive rational number Q_+ forms an abelian group under composition defined by $a * b = \frac{ab}{2}$, $a, b \in Q_+$.

(b) फलन $f : R \to R$ निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x) = \cos x$ जहां $x \in R$ दर्शाइये कि फलन f न ही एकैक है न ही आच्छादक है।

Prove that the mapping $f : R \to R$ defined by $f(x) = \cos x, \forall x \in R$ is neither one-one nor onto.

Q 4 (a) यदि $f : R \to R$, निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x) = e^x$ $\forall x \in R$. दर्शाइये कि f तुल्याकारी है

if $f : R \to R$, defined by $f(x) = e^x, \forall x \in R$, show that f is isomorphism.

(b) दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

The intersection of two subrings is also a subring.

or

(a) दर्शाइये कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रांत है

Show that every field is an integral domain.

(b) समूहों के समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिये तथा सिद्ध कीजिए।

State & prove fundamental theorem of homomorphism of a group.

Q 5 (a) यदि if $x_r = \cos \frac{\pi}{2^r} + i \sin \frac{\pi}{2^r}$ जहां, where $r = 1, 2, 3, \ldots$, दर्शाइये कि show that

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots \infty = -1.$$

(b) दिखाइये कि prove show that

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \cancel{\pi - 2\log}\ \pi - 2\tan^{-1} x.$$

(or)

(a) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए। find sum of the following series.

$$\cancel{\cos\theta} \quad \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{\lfloor 2} + \frac{\cos 3\theta}{\lfloor 3} - \frac{\cos 4\theta}{\lfloor 4} + \cdots \infty$$

(b) यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, सिद्ध कीजिए कि

$$\cos 2\theta \cdot \cosh 2\phi = 3.$$

if $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, then prove that

$$\cos 2\theta \cdot \cosh 2\phi = 3.$$

Govt. Digvijay PG Autonomous College, Rajnandgaon
Assignment-2020
B.Sc. I year
Mathematics
Paper-II (Calculus)

Max Marks-50

Note – Attempt any one question from each unit. Each question carry equal 10 marks
नोट- प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल करें ,प्रत्येक प्रश्न के बराबर 10 अंक हैं।

UNIT-1

Using $\epsilon - \delta$ technique Prove that $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

$\epsilon - \delta$ तकनीक से सिद्ध कीजिये $\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

OR (अथवा)

If $y = e^{a\cos^{-1}x}$ Then prove that

$(1-x^2)y_{n+2} - (2n-1)y_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$. Also find $(y_n)_0$

यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}$ तब सिद्ध कीजिये
$(1-x^2)y_{n+2} - (2n-1)y_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$, $(y_n)_0$ भी ज्ञात कीजिये

UNIT-2

Find the asymptotes of the following curve
$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$

निम्नलिखित वक्र का अनंत्स्पर्शी ज्ञात कीजिये
$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$

OR (अथवा)

Trace the Curve $y^2(a-x) = x^2(a+x)$

वक्र $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ का अनुरेखन कीजिये

UNIT-3

The Cardioid $r = a(1+\cos\theta)$ revolves about initial line. Find the volume of the solid thus generate
कार्डियोइड $r = a(1+\cos\theta)$ प्रारंभिक रेखा के सापेक्ष घुमने से उत्पन्न ठोस का आयतन ज्ञात कीजिये

OR (अथवा)

Find the length of the arc $y = \log\frac{e^x-1}{e^x+1}$ from $x = 1$ to $x = 2$

वक्र $y = \log\frac{e^x-1}{e^x+1}$ के चाप की लम्बाई $x = 1$ से $x = 2$ तक ज्ञात कीजिये

UNIT-4

Solve the differential equation $(D^2 - 2D + 5)y = e^{2x} sinx$
अवकल समीकरण हल कीजिये $(D^2 - 2D + 5)y = e^{2x} sinx$

OR (अथवा)

Find the general solution of $(x - p - y)^2 = p^2 - 1$ where $p = \frac{dy}{dx}$
समीकरण $(x - p - y)^2 = p^2 - 1$ का प्रसामान्य हल ज्ञात कीजिये, $p = \frac{dy}{dx}$

UNIT-5

Solve by method of variation of parameter

प्रचल विचरण की विधि द्वारा हल कीजिये

$$(D^2 - 3D + 2)y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

OR (अथवा)

Solve - हल कीजिये

$$\frac{dx}{z(x+y)} = \frac{dy}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2 + y^2}$$

ांदगांव (छ.ग.)
-036

Session 2019-20

BSc I

Subject - Mathematics

Paper III - Vector analysis and Geometry.

All questions carry equal marks. MM. 50

Q.1. Prove that $\operatorname{div} \operatorname{grad} r^n = n(n+1) r^{n-2}$

सिद्ध कीजिये कि $\operatorname{div} \operatorname{grad} r^n = n(n+1) r^{n-2}$

OR

Find the directional derivative of function $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ at point $P(1,2,3)$ in the direction of line PQ, where co-ordinate of Q is $(5,0,4)$.

फलन $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ की दिशीय अवकलज बिंदु $(1,2,3)$ पर रेखा PQ की दिशा में ज्ञात कीजिये जहाँ Q का निर्देशांक $(5,0,4)$ है।

Q.2. Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F} = 4xz\,i - y^2 j + yz\,k$ taken over along surface S bounded by cube $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ and $z=1$.

सदिश फलन $\vec{F} = 4xz\,\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\,k$ है तो गॉउस डाइवर्जेन्स प्रमेय का सत्यापन कीजिये जहाँ $\vec{F}$ सतह S समतलों $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ व $z=1$ से घिरे घन की सतह है।

OR

Evaluate $\oint_C (xy\,dx + xy^2\,dy)$ using Stokes theorem where C is square in xy-plane whose vertices are $(1,0), (0,1), (-1,0)$ and $(0,-1)$. Also verify Stokes theorem.

स्टोक्स प्रमेय के प्रयोग से $\oint_C (xy\,dx + xy^2\,dy)$ का मान ज्ञात कीजिये, जहाँ C, xy-समतल में एक वर्ग है जिसके शीर्ष (1,0), (0,1), (-1,0) व (0,-1) है तथा स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिये।

Q.3. Trace the conic

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

शांकव का अनुरेखण कीजिये

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

OR

If PSP' and QSQ' are two perpendicular focal chords of the conic. then prove that

$$\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{constant}$$

यदि PSP' तथा QSQ' किसी शांकव की दो परस्पर लंबवत् नाभिगत जीवाएँ है। तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{अचर}$$

Q.4. Find the equation of right circular cylinder whose radius is 2 and equation of axis is $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$.

उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी त्रिज्या 2 है जिसका अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$

OR

Find the equation of cone whose vertex is (0,0,3) and base curve is $x^2+y^2=4, z=0$.

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका शीर्ष (0,0,3) और आधारवक्र वृत्त $x^2+y^2=4, z=0$ है।

1. Reduce the equation into normal form

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

निम्न समीकरण का समानयन प्रमाणिक रूप मे कीजिये

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

OR

Prove that confocal conicoids cut at right angle.

सिद्ध कीजिये कि संनाभि शांकवज एक-दूसरे को समकोण पर काटते है।